Mathematische Begründungsaufgaben

SchreibCenter am Sprachenzentrum

Hinweise & Informationen zu dieser Schreibanleitung 1

Einleitung 2

Basiswissen 2

- Warum Begründungsaufgaben? 2
- Weshalb sich mit der Sprache auseinandersetzen? 3
- Welche Formen von Begründungsaufgaben gibt es? 3
- Was wird erwartet? 7

Schritt für Schritt 8

- Fahrplan für die Bearbeitung von Übungsaufgaben 9
- Hinweise zur Aufgabenbearbeitung in Klausuren 13

Sprache & Stil 14

- Allgemeine Tipps zur sprachlichen Formulierung 15
- Sprachliche Besonderheiten des mathematischen Stils 15
- Verknüpfung von Aussagen durch Konnektoren 16
- Formulierungshilfen 17
- Hinweis auf weitere Materialien 19

Beispiele & Übungen 19

- Beispiel 1: Argumentation oder Stellungnahme 19
- Beispiel 2: Begründung oder Beweis 20

Literatur 21

Hinweise & Informationen zu dieser Schreibanleitung

Hinweis:
Die hier vorgestellten Erklärungen, Hinweise und Empfehlungen sind nach bestem Wissen und Gewissen erstellt und überprüft. Trotzdem möchten wir darauf hinweisen, dass wir für die Inhalte keine Gewähr übernehmen. Bitte halten Sie

sich zu Ihrer eigenen Sicherheit immer an die **Vorgaben Ihrer Dozentinnen und Dozenten bzw. die Richtlinien Ihres Instituts**.
Sollten Sie Ungenauigkeiten oder Fehler in dieser Schreibanleitung finden, freuen wir uns über Ihre Rückmeldung. Vielen Dank!

Autor*innen: Dennis Korus
Erstellung: März 2018
Letzte Überarbeitung: November 2020, Ute Henning & Sandra Schäfer

EINLEITUNG

Insbesondere wenn man es von der Schule nicht gewohnt ist, in Mathematikklausuren längere Texte zu schreiben, können Mathematikveranstaltungen im Studium zu Beginn irritierend wirken. Neben dem Ausführen von Rechenverfahren, Algorithmen und Anwendungen bestehen die Haupttätigkeiten hier im mathematischen Darstellen und Argumentieren, also u. a. im Beweisen und Erläutern von Argumentationsgängen.

Diese Kompetenzen und das Verfassen eigener Argumentationsketten werden allerdings nicht nur in Seminar- und Abschlussarbeiten, sondern auch in Klausuren und den Übungen, die zu Klausuren hinführen sollen, von den Studierenden erwartet. Dies ist im Übrigen auch in allen Mathematikveranstaltungen der technischen und naturwissenschaftlichen Fächer der Fall, weswegen sich dieses Modul ganz bewusst nicht ausschließlich an Mathematikstudierende richtet.

Die schriftliche Beantwortung einer Begründungsaufgabe in der Mathematik wird hier verstanden als eine eigene Textform mit spezifischen Hürden. Solche Aufgaben dienen auch als erste Hinführung zum Schreiben längerer Argumentationsketten, wie sie insbesondere von Mathematikstudierenden in der Studienarbeit gefordert werden (doch auch andere Studierende können dann die gelernten Argumentationstechniken in ihren weiteren Arbeiten nutzen). In Ergänzung zur Schreibanleitung „Seminararbeiten in der Mathematik“ (Online Writing Lab: Fächerspezifische Anleitungen) behandelt der vorliegende Text genau solche Übungsaufgaben. Dabei werden die Übungsaufgaben eben nicht nur als Übung zu den mathematischen Inhalten, sondern auch als Einübung der Schreibkompetenz im Zusammenhang mit dem wissenschaftlichen Arbeiten in mathematikbezogenen Fächern (d. h. Natur- und Technikwissenschaft) gesehen.

BASISWISSEN

Warum Begründungsaufgaben?

Mathematik beinhaltet mehr als nur das Rechnen und Anwenden von Rechenverfahren. Vielleicht haben Sie in Ihrer Schulzeit bereits ein paar Beweise nachvollziehen und selbst durchführen dürfen. Wer aber dachte, dass Textaufgaben der Vergangenheit angehören, bemerkt etwa beim Mathematikstudium: Manchmal sind die Rechenaufgaben sogar in der Unterzahl.

Generell werden Aufgaben an der Universität zu zwei verschiedenen Zwecken eingesetzt:

- als Prüfungsinstrument
- als Lernangebot

Geprüft werden sollen in erster Linie Ihr mathematisches Wissen und Ihre mathematischen Kompetenzen. Bei Begründungsaufgaben meint das vor allem Kompetenzen aus dem Bereich des Argumentierens. Als höchste Form des Argumentierens gilt das Beweisen. Daher legt diese Schreibanleitung den Schwerpunkt auch auf diese Beweise, denen z. B. in der Literatur auch der größte Platz eingeräumt wird. Doch gerade in Studiengängen, in denen Mathematik lediglich einen Teil des Studiums ausmacht, kommen auch andere Formen des Argumentierens zum Einsatz. Daher wird in diesem Abschnitt auch noch geklärt, zwischen welchen Begründungsaufgaben unterschieden werden kann.

Zum Argumentieren gehört nicht nur, das mathematische Wissen sinnvoll in Argumentationskontexten einzusetzen, sondern auch, Argumentationen adäquat darzustellen und aufzuschreiben.

Weshalb sich mit der Sprache auseinandersetzen?

„‚Ich hab's verstanden, aber ich kann es nicht ausdrücken!', ‚Ist das jetzt ein Beweis?',… – mit solche Problemen und Fragen muss jeder umgehen, der sich bemüht, mathematische Gedanken zu Papier zu bringen. Besonders schmerzlich wird oft Studienanfängern diese Problematik bewusst" (Beutelspacher 2009, S. 1).

Es ist besonders frustrierend, wenn man zwar eine Begründung gedanklich durchaus verinnerlicht hat, aber dennoch in der Prüfung die Punkte nicht bekommt, weil man sie nicht zu Papier bringen kann oder sich nicht adäquat ausdrückt. Umgekehrt gilt: Je automatisierter Ihre Schreibkompetenzen sind, umso eher können Sie sich auf die mathematischen Inhalte konzentrieren!

Welche Formen von Begründungsaufgaben gibt es?

Bevor man eine mathematische Schreibaufgabe bearbeiten kann, muss zuerst die Aufgabenstellung verstanden sein – diese ist hier, wie auch bei den klassischen Rechenaufgaben, absolut ausschlaggebend.

Dieser Schreibanleitung liegt – auf Basis der gängigen Schul- und Hochschulcurricula – eine dreigeteilte Klassifikation von (mathematischen) Begründungsaufgaben zugrunde:

1. Beweisaufgaben
2. Argumentationen oder Stellungnahmen
3. Beschreibungen von Lösungswegen

Bitte beachten Sie, dass gerade mit zunehmendem Stoffumfang – d. h. auch mit steigendem Schwierigkeitsgrad – diese Gruppen noch weiter differenziert werden können und eventuell müssen. Eine Unterkategorie der Beweisaufgaben, die noch einmal mit eigenen, zusätzlichen Anforderungen an die schriftliche Form aufwartet, wäre z. B. der Induktionsbeweis.

Beweisaufgaben

Beweisaufgaben sind nach den hier beschriebenen Kategorien sicher die anspruchsvollsten. In den meisten Fällen gibt es hier nicht eine Lösungsmöglichkeit, sondern viele verschiedene. So müssen auch nicht alle Aufgaben dieser Art in Textform gelöst werden, oft reichen Rechnungen und ein paar kurze Schlagworte aus.

Ausformulierte Beweise sind allerdings leichter nachzuvollziehen, und viele Beweise erfordern auch explizit in ganzen Sätzen beschriebene Darstellungen. Wichtig ist hier, dass die einzelnen Beweisschritte präzise widergegeben werden, um Unklarheiten oder Doppeldeutungen zu vermeiden. Bedenken Sie auch: Meist wird im Bewertungsschlüssel eines Beweises exakt aufgeführt, für welchen Schritt man wie viele Punkte erhält. Ist aber der entsprechende Schritt nicht explizit ausformuliert, verliert man an dieser Stelle wichtige Punkte – obwohl man den Beweis genaugenommen vollständig ‚abgelaufen' ist.

Schlagworte, an denen Aufgabenstellungen dieser Art zu erkennen sind, sind z. B.: „Zeigen Sie, dass…", „Beweisen Sie den Satz/Sachverhalt/die Aussage…".

Struktur der Lösung von Begründungs- oder Beweisaufgaben

Zunächst müssen Sie bei Begründungs- oder Beweisaufgaben (bei Letzteren auf jeden Fall) die Aussage, die es zu beweisen gilt, gesondert und vollständig aufschreiben. Meist wird davor ein „ZZ" für „zu zeigen" als Symbol verwendet.

Es folgt die Beweisführung. Grob besteht ein Beweis aus drei Teilen, die immer wieder miteinander kombiniert werden:

1. Einführung einer Annahme/Grundlage
2. Verkettung von Aussagen auf Basis der Grundlage
3. Schluss

Je höher der Komplexitätsgrad einer Aufgabe ist, umso eher müssen diese Schritte aber sogar mehrmals durchlaufen werden. Beispiele, bei denen die obige Struktur erweitert werden muss, sind (vgl. Kümmerer 2016, S. 63 f.):

- Fallunterscheidungen: Hier muss dann dieser ‚Dreischritt' eventuell für jeden Fall durchlaufen werden, damit dann aus allen Fällen ein gemeinsamer Gesamtschluss gezogen werden kann.
- Induktionsbeweise: Hier wird der Dreischritt aus Induktionsbeginn, Induktionsannahme und Induktionsschritt in Punkt 2 eingegliedert.

- Widerspruchsbeweise: Hier werden nicht nur Annahmen eingeführt, die zur Aussage gehören, sondern auch solche, die den Widerspruch herbeiführen. Hinterher müssen Letztere dann noch einmal explizit identifiziert und abgewiesen werden.
- Mehrschrittige Beweise: Zumindest bei längeren Beweisen – wie sie in Übungsaufgaben durchaus vorkommen können – sollen manchmal zunächst ‚Zwischenschritte' formuliert oder ‚Hilfsaussagen' bewiesen werden. Für jede Hilfsaussage eignet sich der obige ‚Dreischritt' zur Herleitung.

Wichtig: Bei einem Beweis kommt es darauf an, dass Sie die einzelnen Aussagen linear aneinander ketten, so wie sie aufeinander aufbauen. Nur in Ausnahmefällen – wenn etwa ein Beweisteil ausgegliedert werden soll – dürfen Sie bestimmte Argumente bereits vorgreifen. Das bedeutet aber auch: In vielen Fällen ist die Reihenfolge, in der Sie die Sätze aufschreiben, nicht identisch mit der Reihenfolge, in der sie Ihnen in den Sinn kamen (wenn Sie z. B. rückwärts vom zu Zeigenden aus gedacht haben).

Argumentationen oder Stellungnahmen

Im Gegensatz zu Aufgaben der vorigen Kategorie ist bei diesen Aufgaben eine ausformulierte Beantwortung zwingend erforderlich.

Besonders häufige Vertreter dieser Kategorie sind Aufgaben, in denen zwei oder mehrere Vorgehensweisen miteinander verglichen werden sollen. Meist ist dies verbunden mit einer konkreten Anwendungssituation, weswegen eine solche Begründungsaufgabe im Mathematikstudium eher selten auftritt. Aber in den technischen und naturwissenschaftlichen Fächern müssen z. B. bestimmte Modellierungen und Formeln auf ihre Anwendbarkeit oder Adäquatheit hin geprüft werden.

Hier kann man sich entweder eindeutig für eine Möglichkeit – eine Vorgehensweise, Annahme/Ablehnung des zu diskutierenden Vorschlags etc. – entscheiden oder unter mehreren abwägen (ähnlich wie bei einer mathematischen Fallunterscheidung). Notwendig ist hier in jedem Fall, die verschiedenen Möglichkeiten zumindest zu benennen – gäbe es nur eine, bräuchte man nicht zu argumentieren.

Schlagworte für diese Art von Aufgaben sind z. B.: „Nehmen Sie Stellung zu der Aussage…“, „Bewerten Sie das Ergebnis…“, „Welches Vorgehen erscheint ihnen sinnvoller…“.

Struktur der Lösung von Argumentationsaufgaben

Bei Argumentationsaufgaben sind Sie, soweit es die Struktur betrifft, in der Regel etwas freier als bei Beweisaufgaben. Das mag auch daran liegen, dass solche Aufgaben seltener den Bereich der ‚harten Mathematik' betreffen als bestimmte Anwendungen.

Hier eignet sich aber die Textform der Erörterung als Maske, um den Lösungsweg für eine Argumentationsaufgabe darzustellen:

1. Einleitung, in der Sie in das Thema einführen und kurz anreißen, zwischen welchen Optionen argumentiert werden soll

2. Hauptteil mit in der Regel zwei zu trennenden Möglichkeiten der Untergliederung:

- zunächst jene Option, die man nicht wählen möchte, in all ihren Vor- und Nachteilen darstellen (dabei mit den Vorteilen beginnen), dann die Option, für die man argumentieren möchte (dabei mit den Nachteilen beginnen)
- ein Kategorienraster erstellen, welches dann im Text nacheinander unter Abwägung aller Optionen abgearbeitet wird

3. Fazit, bei dem Sie noch einmal deutlich machen, wofür Sie nun argumentiert haben

Diese Aufgabenform verlangt meist einen Text von Ihnen, der dem reflektierenden Essay ähnelt (vgl. Schindler 2011, S. 73f.), sodass Sie sich dazu auch in Materialien zu Essays informieren können (siehe z.B. diverse Schreibanleitungen im Online Writing Lab sowie Schindler 2011).

Beschreibung eines Lösungswegs

Bei solchen Aufgaben wird von Ihnen insbesondere erwartet, nicht nur einen Lösungsweg darstellen, sondern diesen auch reflektiert beschreiben zu können. Das bedeutet: Sie sollen Ihr eigenes Vorgehen – oder manchmal auch das Vorgehen eines anderen – Schritt für Schritt begründen. Was wird warum an welcher Stelle getan? Hierbei setzen Sie insbesondere Ihr Wissen um mathematische Sätze, Begriffe und Verfahren ein, um z. B. zu beschreiben, wie man eine bestimmte Lösung erhalten kann bzw. wie man zu einem bestimmten Schluss kommen kann.

Eine solche Aufgabe wird gerne dort eingesetzt, wo der Rechenweg selbst sehr lang und ausführlich – und somit z. B. für eine Klausur zu zeitintensiv – wäre, wo aber dennoch geprüft werden soll, ob Sie auch bei solch komplexen Aufgaben in der Lage sind, einen ‚Lösungsfahrplan' zu erarbeiten. Wichtig ist also, dass Sie bestimmte Verfahren nicht nur rechnen, sondern auch in Worten nachvollziehbar beschreiben und begründen können.

Es ist zu beachten, dass man genau seine Lösung beschreibt und sich im Schriftlichen nicht in Widersprüchen verliert – was schneller passieren kann als man vielleicht denkt.

Struktur Ihres Lösungswegs

Meist gibt das Vorgehen bzw. Verfahren, welches erklärt werden soll, die Struktur bereits vor. Hangeln Sie sich hier ruhig von Schritt zu Schritt vor und beschreiben Sie jeweils, was in welchem Schritt getan wird. Aber: Es ist sinnvoll, zu Beginn erst einmal das Gesamtvorgehen kurz zu erläutern – z. B. auch das Ziel zu nennen und dadurch den Ansatz zu motivieren – und dann erst eine detaillierte Beschreibung zu liefern.

Was wird erwartet?

Sollen Sie etwas beweisen oder begründen, verlangt man von Ihnen „eine klare, präzise, lückenlose und schnörkellose Darstellung Ihrer Argumente – nicht weniger und nicht mehr“ (Kümmerer 2016, S. 64). Das mag zwar einsichtig sein – aber was bedeutet das eigentlich genau? Dieser Frage wird im Folgenden nachgegangen.

Denn: Auch wenn sich mathematische Schreibaufgaben bzw. Aufgabenstellungen voneinander unterscheiden, gibt es doch einige allgemeine Kriterien, die man beachten sollte, wenn man eine solche Aufgabe erfolgreich lösen will.

Mathematische/fachliche Ansprüche

Zuallererst zielt eine solche Aufgabe auf das mathematische Wissen und Können. Hierzu gehören:

- das korrekte Anwenden von Sätzen, Definitionen und Verfahren,
- das Anwenden von ausschließlich solchen Sätzen, Definitionen und Verfahren, die in der Vorlesung oder in früheren Übungen auch tatsächlich gerecht eingeführt wurden, und
- das sinnvolle Auswählen von verwendeten Sätzen, Definitionen und Verfahren (weswegen es z. B. nicht ausreicht, einfach alle möglichen Aspekte, die vielleicht zu dem Thema passen aufzuschreiben und zu hoffen, dass ‚das Richtige schon dabei sein wird‘).

Zum korrekten Anwenden gehört – gerade bei Aufgaben, die eben nicht nur das Rechnen beinhalten – auch das korrekte Formulieren. Beispielsweise ist es mathematisch gesehen ein Unterschied, ob Sie formulieren: „Für alle x gibt es ein y, sodass…“ oder „Es gibt ein y, sodass für alle x…“. Dies ist darüber hinaus auch noch zu unterscheiden von der folgenden Formulierung: „Es gibt genau ein y, sodass…“. Daraus ergeben sich dann auch die folgenden Anforderungen an die Form. Weitere Beispiele finden Sie im Abschnitt Sprache & Stil.

Ausführlichkeit & Vollständigkeit

Korrekte und verständliche mathematische Erklärungen sind oft sehr lang und ausführlich. Man kann zwar auch mit Stichpunkten und kurzen, knappen Sätzen mathematische Sachverhalte korrekt beschreiben – die Frage ist dann aber, ob die (ja immer noch korrekte) Argumentation auch verstanden wird und im Sinne der Korrektur vollständig ist.

„Oft ist eine Argumentation nur schwer nachzuvollziehen, weil logische Zwischenschritte fehlen. Für die Schreibenden sind diese Zwischenschritte meistens so selbstverständlich, dass sie nicht darauf achten, sie zu erläutern“ (Esselborn-Krumbiegel 2017, S. 171). Aber: Beim mathematischen Beschreiben kann man sich auch leicht ‚verheddern‘ – oft gibt es mehrere Variablen, mehre Bedingungen, mehrere Lösungsmöglichkeiten. Ausführlichkeit bedeutet hier daher auch: das richtige Maß an Ausführlichkeit finden!

Genauigkeit/Präzision

Genau wie bei Rechnungen, bei denen man auf die richtigen Variablen, die richtige Schreibweise, die richtige Reihenfolge usw. achten muss, muss man auch bei mathematischen Beschreibungen sehr exakt arbeiten und formulieren. So sollte ersichtlich werden, was man wann womit meint, denn bei Ungenauigkeiten kann – wie bei einer Rechnung – die ganze Argumentation hinfällig werden.

Auch hier gilt: Genauigkeit kann man auch mit knappen Formulierungen erzielen. Für die Lesenden ist es aber, gerade am Anfang des Textes, hilfreich, wenn die Bezeichnungen näher beschrieben werden (z. B. statt „Seite c“ lieber „Seite c, die Hypotenuse“).

Übersichtlichkeit

Auch bei einem handschriftlich abgegebenen Text ist die Formatierung von Bedeutung. Natürlich sind Ihre Möglichkeiten vor allem bei einer Klausur dahingehend beschränkt, dass Sie erstens Ihre Lösung handschriftlich verfassen und zweitens unter Zeitdruck stehen. Bei Übungen aber – die Sie in den meisten Fällen auch handschriftlich bearbeiten – sieht der Bewertungsbogen immer häufiger auch zwei bis drei Punkte für die Ordentlichkeit vor.

Und: Je übersichtlicher Sie Ihren ‚Text‘ gestalten, umso eher wird deutlich, dass Sie die oben genannten Anforderungspunkte auch wirklich erfüllen. Stellen Sie sich vor, wie es wirkt, wenn z. B. Ihr*e Professor*in in der Vorlesung zwar alles erklärt und zeigt, der Tafelanschrieb aber überhaupt nicht übersichtlich ist, weil mal links, mal rechts, mal zwei-, mal einspaltig geschrieben wurde… Und nun stellen Sie sich vor, Sie müssten das auch noch korrigieren!

Darüber hinaus können Sie auch durch eine geschickte Unterteilung des Textes in verschiedene Absätze bereits durch die formale Struktur den Aufbau ihrer Argumentation optisch sichtbar machen. Manchmal gehört eine solche formale Strukturierung auch über die Ordentlichkeit hinaus zu den Anforderungen. Dies gilt etwa für den Induktionsbeweis, bei dem die Verwendung von Zwischenüberschriften (z. B. „Induktionsanfang“ und „Induktionsschritt“) von Ihnen erwartet und auch mit entsprechenden Wertungspunkten belohnt wird.

Schritt für Schritt

Im Folgenden wird vorgestellt, wie Sie an eine Übungsaufgabe schriftlich bearbeiten können. Dabei wird von einer Aufgabe in den wöchentlich (oder zweiwöchentlich) abzugebenden Übungsblättern ausgegangen. Die meisten der vorliegenden Tipps können Sie auch – leicht modifiziert und an die Umstände (z. B. die geringere Zeit) angepasst – für Klausuraufgaben verwenden.

Grob zusammengefasst besteht nahezu jeder Prozess, an dessen Ende ein mathematischer Text stehen soll, aus zwei Phasen (vgl. Beutelspacher 2009, S. 3):

1. Explorationsphase: In dieser Phase sammeln Sie Ihre mathematischen Gedanken in Bezug auf die zu bearbeitende Aufgabe und ordnen sie. Hier entstehen Notizen, Ideen und Pläne.
2. Konsolidierungsphase: Hier entsteht dann die Reinschrift, d. h. Ihre Lösung in einer Version, die Sie auch abgeben können

Der folgende Fahrplan ist zu verstehen als eine Möglichkeit, wie man diese beiden Phasen konkret umsetzen und miteinander verknüpfen kann. Bitte beachten Sie dabei, dass es sich lediglich um einen Vorschlag handelt, den Sie nicht vollständig in dieser Form übernehmen müssen, der aber in vielerlei Hinsicht Ihre Arbeitsroutine vereinfacht.

Fahrplan für die Bearbeitung von Übungsaufgaben

Schritt 1: Aufgabe durchlesen

Dass man sich die Aufgabe überhaupt erst einmal durchlesen muss, bevor man sie bearbeiten kann, dürfte einsichtig sein. Allerdings kann mehr oder weniger zielführend gearbeitet werden:

- **Lesen Sie sich die Aufgabe bis zum Ende durch!** Das bedeutet auch: Lesen Sie nicht nur Teilaufgabe a), sondern auch schon einmal b) und c). Gerade bei Begründungsaufgaben bauen Teilaufgaben häufig aufeinander auf. Bereits zu wissen, worauf Teilaufgabe a) aber abzielt, kann enorm bei der Suche nach einer Begründungsidee helfen.
- **Markieren Sie Schlüsselwörter im Aufgabentext!** Dadurch lenken Sie Ihre Aufmerksamkeit auf wichtige Schlagworte und wissen direkt, in welchem (Unter-)Thema die Aufgabe zu verorten ist. Das hilft auch bei der Suche nach geeigneten Sätzen und Anmerkungen aus dem Skript.
- **Nutzen Sie ein Farbensystem!** Insbesondere bei Beweisaufgaben ist es wichtig, genau und schnell unterscheiden zu können, was gezeigt werden muss. Machen Sie daher die Aussage, um die es tatsächlich geht, farblich sichtbar. Und: Markieren Sie auch – falls genannt – Annahmen und Voraussetzungen, die Sie verwenden sollen – nutzen Sie hierfür aber am besten eine andere Farbe.

Schritt 2: Voraussetzungen und Folgerungen getrennt aufschreiben

Insbesondere eine Aussage, die es zu beweisen gilt, besteht aus Voraussetzungen und Folgerungen, die Sie im Idealfall bereits farblich markiert haben. Bei besonders komplexen Aussagen hilft es aber häufig, noch einmal Voraussetzungen und Folgerungen gesondert in Notizform aufzulisten.

Vielleicht kennen Sie es aus Vorlesungen oder Tutorien, dass, bevor ein Beweis geführt wird, noch einmal genau aufgeschrieben wird, was es zu zeigen gilt. Das hilft später dabei, zu entscheiden, an welcher Stelle man die Argumentation beenden kann, und nicht zu verwechseln, welche Voraussetzungen man verwenden darf und welche nicht. Die in der Aufgabe genannten Voraussetzungen (z. B. des zu zeigenden Satzes) noch einmal übersichtlich vor Augen zu haben, hilft häufig auch beim nächsten Schritt.

Schritt 3: Skript verwenden – Wie kann man die Voraussetzungen nutzen?

Gerade bei Übungsaufgaben lohnt es sich häufig, sich noch einmal im Skript einzulesen: Welche Aussagen wurden zuletzt bewiesen? Welche Objekte wurden definiert? Welche Verfahren und Beweistechniken wurden eingeführt?

Bei der Suche nach einer Argumentationsidee hilft es zudem in vielen Fällen, diese Informationen zusammenzusuchen und sie sich z. B. stichpunktartig aufzuschreiben. Damit diese Arbeit nicht als reines Abschreiben erscheint – ein solches ist nur selten nützlich –, helfen u. a. die folgenden Fragen bei der gezielten Suche im Skript:

- Welche der Sätze benutzen ähnliche oder dieselben Voraussetzungen wie die zu zeigende Aussage?
- Welche der Sätze führen zu ähnlichen oder denselben Folgerungen wie die zu zeigende Aussage (nur eben vielleicht unter anderen Voraussetzungen)?
- Welche Definitionen ermöglichen mir eventuelle Fallunterscheidungen, bei denen zumindest einige Fälle leicht abzuarbeiten sind?
- Welche der Sätze, Definitionen und Verfahren helfen mir, um ein bestimmtes Vorgehen zu begründen?

Insbesondere in den ersten Übungen finden Sie vielleicht sogar Aufgaben, bei denen Sie ganz explizit aufgefordert werden, noch einmal alle Aussagen über ein bestimmtes mathematisches Objekt zusammenzuschreiben und aus diesen nun den Beweis einer weiteren Aussage zu basteln. Behalten Sie diese im ersten Semester oft angeleitete Strategie ruhig auch später bei!

Tipp: Bei Stellungnahmen lohnt es sich zudem, Skriptinhalte danach zu ordnen, für welche ‚Seite' eines Sachverhalts sie als Argumente hergenommen werden können.

Schritt 4: Probephase

In einigen Fällen werden Sie an dieser Stelle bereits eine Beweis- bzw. Argumentationsidee haben – in anderen Fällen allerdings nicht. Hier hilft dann lediglich: Probieren Sie einfach ein paar Dinge aus! Formen Sie die eine oder andere Gleichung um, setzen Sie die Aussage in einem anderen Fall ein usw.

Hilfreich ist es aber, wenn Sie sich über die folgenden Aspekte Gedanken machen, um systematisch zu probieren:

- Welche der in Schritt 3 herausgeschriebenen Sätze bauen wie aufeinander auf?
- Wie viel von meiner angepeilten Argumentationskette kann ich allein durch eine Verkettung der in Schritt 3 herausgeschriebenen Sätze bereits zeigen? Was fehlt mir dann noch?
- Hilft es mir vielleicht, bekannte Sätze, Definitionen usw. umzuformen? Häufig hilft z. B. auch das Bilden der sogenannten Kontraposition oder auch der Negation, um daraus einen Widerspruch abzuleiten.

In dieser Phase werden Sie immer wieder neu ansetzen müssen, vielleicht auch immer wieder Wege und Teilwege verwerfen und nach Abzweigungen in ihrer Argumentation suchen. Es kann insbesondere bei kniffligen Übungsaufgaben schon einmal der Fall sein, dass Sie z. B. für einen Beweis, der eigentlich nur über ein oder zwei handschriftliche Seiten geht, vorher fünf oder zehn Seiten ‚vollgekritzelt' haben.

Was Sie in dieser Phase aufschreiben, werden Sie in der Regel nicht abgeben! Aber: Sie werden es später für eine eventuelle Reinschrift wiederverwenden (müssen). Daher beachten Sie bitte auch bei diesen für Sie allein erstellten Notizen:

- Einerseits müssen Sie hier noch nicht ‚perfekt' formulieren und die Ideen lediglich so aufschreiben, dass Sie selbst später noch wissen, worum es jeweils ging. Andererseits ist das manchmal gar nicht so leicht: Gerade, wenn Sie – vielleicht weil Sie an einer Stelle nicht weiterkommen – eine längere Pause machen, müssen Sie trotzdem hinterher schnell wieder den Überblick dafür bekommen, was Sie denn bereits getan und ausprobiert haben.
- Streichen Sie nicht zu schnell durch! Manchmal hat man doch schon viele wichtige Argumentationsschritte unternommen, konnte es aber einfach noch nicht zum Abschluss bringen.
- Machen Sie aber in Ihren Unterlagen in jedem Fall deutlich, wann Sie eine neue Idee ausprobieren! Benennen Sie vielleicht Ihre Argumentationsideen, z. B. mit Kurzworten wie „Fallunterscheidung", „Widerspruch" etc. Insbesondere, wenn Sie nicht kontinuierlich an derselben Aufgabe arbeiten können, sondern zwischendrin auch ein paar Tage pausieren, hilft Ihnen das später dabei, sich wieder in die eigenen Gedankengänge und Notizen einzuarbeiten und zu erinnern.

Schritt 5: Argumentationskette stichpunktartig oder formelhaft niederschreiben

Wenn Sie am Ende sämtliche benötigten Argumente zusammengefunden haben, sollten Sie – gerade dann, wenn Sie viel Papier benötigt haben und Ihnen das zielgerechte Formulieren noch schwerfällt – zunächst noch einmal in knapper Form stichpunktartig zusammenfassen, welche Teilschritte Ihre Argumentation umfassen wird.

Aus der Schule kennen Sie es vielleicht noch als Strategie, dass Sie – nachdem Sie z. B. Pro- und Contra-Argumente für Ihre Erörterung gesammelt haben – noch einmal eine kurze Gliederung erstellen. Diese hilft bei Begründungsaufgaben insbesondere dann, wenn man zwar den mathematischen Inhalt schon verstanden, aber noch Probleme mit dem Formulieren hat. Dadurch, dass Sie hier den ‚Stoff' dann noch einmal für Sie selbst komprimiert zusammenfassen, können Sie sich im nächsten Schritt auf das Formulieren konzentrieren.

Wichtige Aufgaben bei diesem Schritt sind:

- Argumente, die in Schritt 4 aufgeschrieben wurden, ggf. filtern. Nicht alles davon wird relevant sein, sodass Sie nun jene Argumente identifizieren, die Ihnen nicht bei Ihrer Erläuterung oder Begründung helfen. Manchmal fällt Ihnen auch auf, dass Sie den einen oder anderen Argumentationsgang zu ausführlich (z. B. mit einer nachträglich hinfälligen Fallunterscheidung) durchgeführt haben – auch solche Aspekte sollten hier korrigiert werden.
- Argumente in eine sinnvolle Reihenfolge bringen. Dieser Schritt muss besonders häufig gegangen werden, denn: „Selten stellen sich die einzelnen Schritte eines Beweises in der Reihenfolge ein, in der sie am Ende präsentiert werden sollten“ (Kümmerer 2016, S. 65).

Daraus entwickeln Sie dann eine stichpunktartige Gliederung für Ihre eigene ausformulierte Aufgabenlösung. Vergessen Sie dabei im Übrigen nicht, ggf. die Aussagen und Definitionen, die Sie für die einzelnen Argumente nutzen, gemäß ihrer Nummerierung im Skript zu notieren. Das erleichtert Ihnen später das Suchen.

Tipp: Bevor Sie zum nächsten Schritt weitergehen, sollten Sie an dieser Stelle noch einmal Ihren Argumentationsweg durchdenken. Hier haben Sie noch die Möglichkeit, sich allein um die Argumentation als solche zu kümmern, bevor Sie an das endgültige Formulieren herangehen.

Schritt 6: Reinschrift verfassen

Nun sind Sie bestens gewappnet, um Ihre Abgabe vorzubereiten: Sie formulieren nun die Reinschrift, d. h. Sie schreiben Ihre Lösung so auf, dass sie danach nahezu abgabefertig ist. Dazu nutzen Sie in erster Linie Ihren in Schritt 5 erstellten Fahrplan. Ihre Aufgabe ist nun: Sie müssen die in Schritt 5 erarbeitete „Sachlogik in Sprachlogik“ (Esselborn-Krumbiegel 2017, S. 169) überführen.

Wichtig ist hier, dass Sie Ihre vollständige Argumentation möglichst präzise und – abgesehen von Formeln u. Ä. – in vollständigen Sätzen formulieren. Halten Sie sich dabei an die vorher festgelegte Reihenfolge und haken Sie ggf. in Ihrer Gliederung ab, welche Argumente Sie bereits verschriftlicht haben.

Hinweise:

- Jede Bezeichnung muss eingeführt werden und darf nur injektiv eingesetzt werden, d. h. eine Bezeichnung darf nur für ein einziges Objekt gelten (vgl. Kümmerer 2016, S. 80 f.).
- Formulierungshilfen, die Sie hier verwenden können, finden Sie im Abschnitt Sprache & Stil sowie häufig auch im Skript oder den Tutorienmitschriften.
- Dort wo eine detaillierte Darstellung Ihrer Argumentation entweder den Fokus vom Kern der Aufgabe wegbewegt oder zu unübersichtlich geraten würde, ist es erlaubt – und in den genannten Fällen auch sinnvoll –, Lücken zu setzen. Wichtig ist es aber in diesem Fall, solche Lücken zu kommentieren und zu erläutern, warum sie an der jeweiligen Stelle zulässig sind (vgl. Kümmerer 2016, S. 64).

- Entscheiden Sie also, welche Schritte Sie wirklich ausführlich darstellen. Beispiel: Sie nehmen eine Fallunterscheidung mit drei Fällen vor. Der erste und der zweite Fall sind deutlich voneinander zu unterscheiden, Fall 3 wird aber sehr ähnlich gezeigt wie Fall 2 (z. B. dieselben Umformungen, nur mit unterschiedlichen Vorzeichen). Sie könnten jetzt Fall 3 noch einmal komplett aufschreiben – zielführend ist dies jedoch nicht und es zeigt auch nicht weiter, dass sie die Argumentation bereits verstanden haben (denn das haben Sie bereits durch die Darstellung von Fall 2 gezeigt). Stattdessen zeigen Sie, dass Sie die Fallunterscheidung verstanden haben, wenn Sie bemerken, dass Fall 3 analog zu Fall 2 bewiesen werden kann.
- Arbeiten Sie sich Schritt für Schritt durch Ihren Fahrplan und beachten Sie dabei die im Abschnitt Basiswissen genannten Anforderungen. Das mathematische Know-how haben Sie bereits in Schritt 5 fokussiert zusammengetragen.

Am Ende dieses Schritts haben Sie also einen vollständigen, ausformulierten und nahezu abgabefertigen Argumentationstext vor sich liegen.

Schritt 7: Erneutes Durchlesen

Zuletzt sollten Sie Ihren Text noch einmal durchlesen. Achten Sie dabei möglichst nur noch auf Details! Wenn Sie an dieser Stelle noch einmal Ihre gesamte Argumentationskette infrage stellen, müssen Sie wahrscheinlich wieder bei Schritt 3 oder 4 einsteigen.

Aspekte, auf die Sie bei diesem Schritt achten sollen, sind:

- Kommasetzung
- Rechtschreibfehler
- Korrekte Begrifflichkeiten
- fehlende Wörter (z. B. ein „genau“)
- Verwendung derselben Bezeichnungen für dieselben Objekte

Weitere Informationen und Materialien zum Korrigieren und Überarbeiten von Texten finden Sie im Online Writing Lab in der Schreibanleitung „Überarbeiten wissenschaftlicher Texte“ (Fächerübergreifende Anleitungen) sowie bei den Schreibtechniken und -übungen im Abschnitt „Überarbeiten“.

Hinweise zur Aufgabenbearbeitung in Klausuren

Beim obigen Fahrplan für die Bearbeitung von Übungsaufgaben wurde Folgendes bedacht:

- In der Regel haben Sie für ein Übungsblatt mit zumeist drei bis vier Aufgaben etwa eine Woche Zeit. Daher erwartet man von Ihnen auch, dass Sie sich die gegebene Zeit nehmen und Ihre Abgabe nicht wie ein Schmierpapier wirkt.

- Weil Sie mehr Zeit für eine Übung haben, sind die Aufgaben – vor allem aber die Begründungsaufgaben – dort meist langwieriger und etwas anspruchsvoller als entsprechende Klausuraufgaben.

In Klausuren hingegen herrscht vergleichsweise Zeit- und auch Platzmangel. Während in einer Übung eine Begründungsaufgabe alle Facetten eines Themas abdecken kann (nämlich eben des Themas der Übung), muss sich dieses Thema in der Prüfung nun die Prüfungszeit mit anderen Themen teilen. Insbesondere Aufgaben, in denen Schritt 4 besonders viel Zeit in Anspruch nimmt, weil die Aufgabe etwas Knobelei erfordert, werden in Klausuren u. a. daher in aller Regel vermieden.

Dennoch ist auch in der Klausur ein Schmierpapier durchaus ratsam!

- Denken Sie daran, wie Sie in der Schule (auch in Klausuren) an Erörterungen und argumentative Texte herangegangen sind. Die dort eingesetzten Strategien – ein Schmierpapier, eine Liste mit den wichtigsten Argumenten usw. – können Ihnen auch in der Mathematikklausur helfen!
- Falls Sie Bedenken haben, durch ein Schmierpapier Zeit zu verlieren: Die Argumentationsgänge, die in einer Klausuraufgabe von Ihnen gefordert werden, sind in der Regel etwas kürzer oder aber hinsichtlich der Punktzahl doch wieder so viel wert, dass Sie sich die Zeit nehmen können und sollten.
- Gerade in der Klausursituation kann es passieren, dass man zwar die Idee für den Beweis erarbeitet, sich allerdings im Eifer des Gefechts nicht direkt darüber im Klaren ist, in welcher Reihenfolge die Schritte nun aufgeschrieben werden müssten (da man häufig aus Zeitnot, hatte man einmal die Beweisidee, am liebsten alle Schritte zugleich aufschreiben wollte). Schreiben Sie sich auch an dieser Stelle, wie oben vorgeschlagen, eine Struktur vor! Hier reichen aber auf dem Schmierblatt kleine formelhafte Notizen oder auch Wortmarken wie z. B. „umformen“ oder „einsetzen“.

Sprache & Stil

„Voraussetzung für eine gute Arbeit ist korrekte Rechtschreibung und korrekter Umgang mit der Sprache“ (Kümmerer 2016, S. 72). Das gilt auch für Übungen und Klausuren – selbst wenn hier nicht der Fehlerquotient ausgerechnet wird, wie es mittlerweile etwa in den hessischen Abiturprüfungen in Mathematik der Fall ist. Nur ein korrekter Umgang mit der Sprache gewährleistet, dass Sie auch korrekt und in Ihrem Sinne verstanden werden.

Daher ist zu beachten: „Tun Sie alles, um den Lesern den Zugang zu Ihren Gedanken so leicht wie möglich zu machen“ (Kümmerer 2016, S. 63) – immerhin liegt es ja in Ihrem Interesse, dass man Ihre Gedankengänge erkennt und möglichst hoch bewertet.

Allgemeine Tipps zur sprachlichen Formulierung

Zu allererst sollten Sie berücksichtigen: „Auch in einem mathematischen Text *müssen* Rechtschreibung, Zeichensetzung und Grammatik korrekt sein“ (Kümmerer 2016, S. 52).

Das gilt nicht nur für Seminar- und Abschlussarbeiten, sondern genauso für alle anderen Abgaben (z. B. Übungen und Klausuren). Selbst wenn im Studium manche Klausuren kaum auf Rechtschreibung hin korrigiert werden: Mindestens in den vorher abzugebenden Übungen gehören formale Aspekte der Sprache – auch Kommafehler – immer häufiger zu den sogenannten Formpunkten – und es ist ärgerlich, deswegen den erhofften Notenbonus oder die Studienleistung nicht mehr zu bekommen. Und: Nehmen Rechtschreib- und Zeichensetzungsfehler in der Klausur Überhand, dann erfolgen auch hier Punktabzüge.

Weiter ist aber auch zu beachten: „Korrektes Deutsch ist eine notwendige, wenn auch bei Weitem keine hinreichende Voraussetzung für gutes Deutsch“ (Kümmerer 2016, S. 51).

Selbstverständlich sind hier die Ansprüche an Übungsabgaben und Klausuraufgaben etwas geringer als z. B. bei der Abschlussarbeit (allein schon aufgrund der Vorbereitungszeit), doch auch hier hilft ein gutes Deutsch insbesondere dabei, die Kriterien an eine Aufgabenbearbeitung zu erfüllen bzw. möglichst gut in der Bewertungssituation dastehen zu können.

Dazu gehören auch vielleicht nicht ganz so offensichtliche Aspekte. Z. B. rät Kümmerer (2016, S. 68), „überhebliches Deutsch“ zu vermeiden, mit dem Sie Aspekte, über die Sie ja eigentlich mittels der Aufgaben geprüft werden, als zu leicht für Sie abtun. „Allen voran wirkt der häufige Gebrauch des Wortes ‚trivial‘ überheblich“ (Kümmerer 2016, S. 68). Insbesondere in einer Prüfungssituation ist diese Wendung zu vermeiden, da Sie ja zeigen sollen, dass Sie die Argumentation in jeder Einzelheit – und sei sie noch so trivial – verstanden haben. Gerade in der Klausur würde es Sie ärgern, wenn Sie einen Argumentationsschritt als trivial abtun und daher nicht weiter erläutern, genau diese Erläuterung aber im Bewertungsschema eigentlich einen Punkt erhalten würde.

Sprachliche Besonderheiten des mathematischen Stils

Zu beachten sind aber vor allem Aspekte der mathematischen Sprache. Hierbei handelt es sich um Besonderheiten, die sich in der Fachwissenschaft eingeschliffen haben, die aber gerade Fachfremden, also solchen, die nicht Mathematik studieren oder studiert haben, etwas Gewöhnung abverlangen. Insbesondere ist dem so, weil manche Alltagsregeln für gute Texte im mathematischen Kontext etwas anders umgesetzt werden müssen oder gar in verschärfter Form gelten.

1. Kümmerer (vgl. 2016, S. 71) rät dazu, Synonyme nur für mathematische Tätigkeiten (z. B. ‚zeigen‘, ‚beweisen‘, ‚ausführen‘) zu verwenden, um den Text abwechslungsreicher zu gestalten. Zu vermeiden ist es hingegen, die Benennung der mathematischen Objekte zu

variieren. Sprechen Sie z. B. etwa abwechselnd von einer Abbildung und einer Funktion, führt dies zur Verwirrung, da nicht klar ist, ob Sie jeweils dasselbe mathematische Objekt meinen.

2. „Ein bestimmter Artikel verweist auf etwas, das existiert und eindeutig ist“ (Kümmerer 2016, S. 71) – diese Regel gilt in der Mathematik in gewisser Hinsicht noch stärker als im Alltag, da die Eindeutigkeit eines Objekts ganz bewusst eine starke Aussage darstellt.
3. Gerade bei längeren Texten ist es einfacher für die Leser*innen, wenn Sie Ihren Satzbau variieren. So können Sie statt „Sei a ein Element mit Eigenschaft A. Sei b ein Element mit Eigenschaft B“ auch schreiben: „Sei a ein Element A. Weiter definieren wir Element b mit Eigenschaft B“. Aber es gilt: „Ein mathematischer Text ist [...] kein Schulaufsatz, bei dem die Ausdrucksvielfalt die entscheidende Rolle spielt“ (Beutelspacher 2009, S. 33), da die Präzision an erster Stelle steht. Dennoch lohnt es sich, zumindest für die häufigsten Schritte (z. B. für Folgerungen) mehrere Formulierungen zu kennen, denn sie erleichtern es auch Ihnen, Ihre Gedanken variationsreich und lesefreundlich darzustellen.

Verknüpfung von Aussagen durch Konnektoren

Aussagen bestehen in der Mathematik in ihrer Grundform häufig zunächst einmal nur aus einer Referenz und einem Prädikat, d. h. einem mathematischen Objekt (Referenz) bzw. einer Menge an Objekten wird eine Eigenschaft zugeordnet (Prädikat).

Beispiel:

- Das neutrale Element der Gruppe $(\mathbb{N},\cdot)$ ist eindeutig.
- Das neutrale Element der Gruppe $(\mathbb{N},\cdot)$ hat sich selbst als Inverses.

Solche sogenannten atomaren (nicht mehr weiter zerlegbaren) Aussagen können nun mittels bestimmter logischer Verknüpfungen, sogenannter Junktoren, zu komplexen Aussagen verknüpft werden. Im obigen Beispiel bietet sich ein ‚und‘ als Verknüpfung an.

Beispiel:

- Das neutrale Element der Gruppe $(\mathbb{N},\cdot)$ ist eindeutig und das neutrale Element der Gruppe $(\mathbb{N},\cdot)$ hat sich selbst als Inverses.
- *bzw. etwas eleganter:* Das neutrale Element der Gruppe $(\mathbb{N},\cdot)$ ist eindeutig und hat sich selbst als Inverses.

Diese sogenannten Junktoren, also aussagenlogische Verknüpfungen, werden sprachlich insbesondere durch Konnektoren, beispielsweise Konjunktionen, ausgedrückt. Oben wurde z. B. der Junktor $\wedge$ (als Zeichen für die aussagenlogische Verknüpfung der Konjunktion) durch den Konnektor ‚und‘ sprachlich dargestellt. Dabei ist es absolut notwendig, dass die Konnektoren in der für die Mathematik richtigen Bedeutung verwendet werden. Das kann insbesondere deshalb eine Hürde sein, da

a) manche Wörter (wie z. B. ‚oder') in der Mathematik mit einer etwas anderen Bedeutung besetzt sind als im Alltag und
b) einige der in der Mathematik verwendeten Satzverknüpfungen im Alltag nur sehr selten verwendet werden.

In einigen Mathematikvorlesungen wird man zu Beginn daher zunächst in die Aussagenlogik eingeführt. Doch auch dann führt die richtige Satzverknüpfung immer wieder zur Verwirrung. In der folgenden Tabelle sind daher die wichtigsten Junktoren zusammengefasst. Dabei wird auch auf den jeweils zu verwendeten Konnektor hingewiesen und kurz die Bedeutung erläutert (siehe Tab. 1). Achten Sie also darauf, dass Sie stets die richtige Wortwahl in der richtigen Bedeutung verwenden (vgl. z. B. Ziegler 2017, S. 3 f.).

Tab. 1: Logische Verknüpfungen in mathematischen Texten

Name der logischen Verknüpfung	**Junktorzeichen**	**Konnektor**	**Bedeutungserläuterung**
Konjunktion	$\wedge$	und	Eine durch Konjunktion konstruierte komplexe Aussage ist nur dann wahr, wenn alle Einzelaussagen auch wahr sind.
Disjunktion	$\vee$	oder	Eine durch Disjunktion konstruierte Aussage ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der Einzelaussagen wahr ist. Bemerkung: Bei diesem ‚oder' handelt es sich NICHT um ein ausschließendes ‚oder', d. h. in der Mathematik wird strikt getrennt zwischen ‚oder' und ‚entweder oder' (wobei letzteres nur sehr selten vorkommt)
Implikation	$\Rightarrow$	Wenn… dann…	Damit eine ‚Wenn… dann'-Beziehung der Form $p \Rightarrow q$ wahr ist, darf es keinen Fall geben, in dem q wahr ist, p aber nicht.
Äquivalenz	$\Leftrightarrow$	… genau dann, wenn…	Eine Äquivalenz ist stärker als eine Implikation, denn sie ist so gesehen als eine doppelte Implikation zu verstehen. Im Falle $p \Leftrightarrow q$ folgt q aus p, aber q impliziert auch wieder p.

Überhaupt gilt: In der Mathematik werden sprachliche Unterschiede zwischen Formulierungen gemacht, die man im Alltag häufig gar nicht unterschiedlich verwendet. Schlagen Sie etwa ruhig einmal den Unterschied zwischen ‚Es gibt ein…" und „Es gibt genau ein…" nach.

Formulierungshilfen

Damit man sich mit der Zeit auf die mathematischen Kompetenzen und Inhalte, die durch Begründungsaufgaben eigentlich eingeübt und vertieft werden sollen, konzentrieren kann, hilft es, sich einen Fundus aus immer wieder auftretenden Wendungen und Überleitungen anzueignen. Auf diesen kann immer wieder zurückgegriffen werden.

Es bietet sich an, nach solchen Formulierungen u. a. in den Skripten Ausschau zu halten. Nach und nach bemerkt man dann, welche Formulierungen in welchen Abschnitten einer Begründung besonders häufig verwendet werden. Auch gibt es bestimmte Wendungen und Satzbauten, die im üblichen Mathematikskript als Signalwörter oder -konstruktionen für die Verwendung einer bestimmten Beweisart dienen.

Beispiel: „Sei n eine beliebige natürliche Zahl" findet sich häufig als Standardformulierung zu Beginn von Induktionsbeweisen wieder (im sogenannten Induktionsanfang).

Tabelle 2 enthält einige Formulierungshilfen. Diese sind danach klassifiziert, in welchem Abschnitt bei der Argumentationsführung einer mathematischen Begründung sie vornehmlich verwendet werden können. Dabei richtet sich die Tabelle vor allem an den Schritten einer Beweisdarstellung. Allerdings können Sie die allermeisten Formulierungen auch an ähnlichen Stellen verwenden.

Tab. 2: Formulierungshilfen für mathematische Texte

Annahmen und Voraussetzungen	Wir nehmen an, dass … Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass … Unter der Annahme/Bedingung/Prämisse … gilt …
Einem Element zugewiesene Eigenschaften	Ausgehend davon, dass Element a die Eigenschaft A erfüllt, … Betrachte Element a mit Eigenschaft A … … für den allgemeinen Fall … Element a genüge der Eigenschaft A Element a habe die Eigenschaft A Sei a ein Element der Menge A mit der Eigenschaft …
Konklusion	Wenn p gilt, dann folgt daraus q p und q sind äquivalent Wenn p gilt, so sind q und r äquivalent Unter der Bedingung p folgt die Eigenschaft A für ein Element a, welches p erfüllt
Einleitung zu Beweisen	Es genügt zu zeigen, dass … Wir führen die Annahmen p und q zu einem Widerspruch … Der Beweis ist ein Widerspruchsbeweis … Der Beweis zergliedert sich in drei Schritte, die da lauten … In einem ersten Schritt zeigen wir, dass …
Weiterführen von Beweisen	Im nächsten Beweisschritt zeigen wir, dass … Der nächste Schritt besteht nun darin, zu zeigen, dass … Es bleibt noch zu zeigen, dass … Wir nehmen nun umgekehrt an, dass … Wir zeigen nun den zweiten Fall, der … Nun verwenden wir die Annahme/den in der Vorlesung bewiesenen Satz, dass … Wir müssen nun im nächsten Schritt bestimmen …
Folgerungen	Aufgrund der Voraussetzung, dass … , folgt nun weiter, dass … Daher/Deshalb/Deswegen/Unter den gegebenen Bedingungen folgt, … Folglich gilt, dass … Es ergibt sich, dass … Per definitionem folgt … In diesem Falle … … hat zur Folge/impliziert/ermöglicht die Folgerung, dass …
Ende des Beweises	Das ergibt zuletzt die Behauptung, … Damit ist gezeigt, dass … Es folgt, was zu beweisen war. … liefert das gewünschte Resultat

Beachten Sie: Die obige Tabelle erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit! Daher unser Tipp: Nehmen Sie diese Tabelle zur Grundlage und ergänzen Sie sie mit zunehmender Erfahrung. Dabei können Sie auch weitere Literatur verwenden, siehe z. B. die Formulierungshilfen bei Kümmerer (2016, S. 197-204). Insbesondere können die Kategorien noch weiter verfeinert werden – unterteilen Sie z. B. weiter nach bestimmten Beweisideen, etwa Widerspruch, Induktion usw. Wie diese Verfeinerungen aussehen, hängt aber im starken Maße davon ab, ob und in welche Richtungen Sie sich in der mathematischen Theorienbildung vertiefen. Für eine Einführung in die Mathematik, wie sie in den natur- und technikwissenschaftlichen Studiengängen Teil des Studienplans ist, reicht die obige Tabelle aber in der Regel weitestgehend aus.

Hinweis auf weitere Materialien

Neben dem bereits erwähnten Buch „Wie man mathematisch schreibt" von Kümmerer (2016) ist auch die Schreibanleitung „Seminararbeiten in der Mathematik" (Online Writing Lab: Fächerspezifische Anleitungen) zu empfehlen. Der Schwerpunkt dort liegt auf den Herausforderungen einer Seminararbeit, die teilweise andere sind als in einer Übungsaufgabe (z. B. müssen Sie in Seminararbeiten viel häufiger selbst Objekte benennen). Es werden dort aber auch zum Stil einer Seminararbeit Tipps gegeben, u.a. zum Umgang mit Zahlen und Symbolen und zur Verwendung des Konjunktivs.

Beispiele & Übungen

Beispiel 1: Argumentation oder Stellungnahme

Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage: Würde man rein zufällig Zahlen aus Benfords 20.229 Daten auswählen und diese in einer neunseitigen Logarithmentabelle nachschlagen, so würde auf lange Sicht die erste Seite mehr als sechsmal so stark beansprucht werden wie die letzte Seite.

Lösung

Im ersten Moment erscheint dieser Zusammenhang logisch. Benfords Daten wurden verwendet, um seine errechneten Wahrscheinlichkeiten zu belegen. Nach diesen Wahrscheinlichkeitswerten kommt die 1 als Anfangsziffer mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3010 vor, die 9 nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,0458, die 1 kommt also mehr als 6 mal häufiger vor als die 9. In einer neunseitigen Logarithmustabelle stehen auf der ersten Seite alle Zahlen, die mit 1 beginnen, auf der zweiten Seite alle, die mit zwei beginnen, ..., auf der neunten Seite alle Zahlen, die mit 9 beginnen. Würden alle 20.229 Daten aus Benfords Versuch von der neunseitigen Logarithmustabelle erfasst werden, könnte man der Aussage also zustimmen.

Wir wissen allerdings nicht, wie groß die Zahlen waren, die Benford untersucht hat, außerdem können wir nur vermuten, welche Zahlen von der Logarithmustabelle erfasst werden. Da die Tabelle nur 9 Seiten hat, können es nicht allzu viele Zahlen sein. Angenommen, die

Logarithmustabelle erfasst Zahlen von 1,00 bis 9,99, dann stehen auf der ersten alle Zahlen von 1,00 bis 1,99 und auf der neunten Seite alle Zahlen von 9,00 bis 9,99. Es könnten in dieser Tabelle also alle Zahlen von 1,00 bis 9,99 sowie alle Vielfache der Zahlen, die bei der Multiplikation mit einer Zehnerpotenz und einer Zahl von 1,00 bis 9,99 entstehen, nachgeschlagen werden, da sich diese ja nur in ihrer Kennziffer und nicht in der Mantisse unterscheiden. Eine Zahl wie 12376 würde von der Tabelle allerdings nicht erfasst werden. Würde man also rein zufällig Zahlen aus Benfords 20.229 Daten auswählen, wären sicher nicht alle in der neunseitigen Logarithmustabelle zu finden, und damit wäre die Auswertung nicht für beliebige Zahlen durchführbar, da in der Aufgabenstellung nicht klar wird, wie mit diesen Zahlen umgegangen wird.

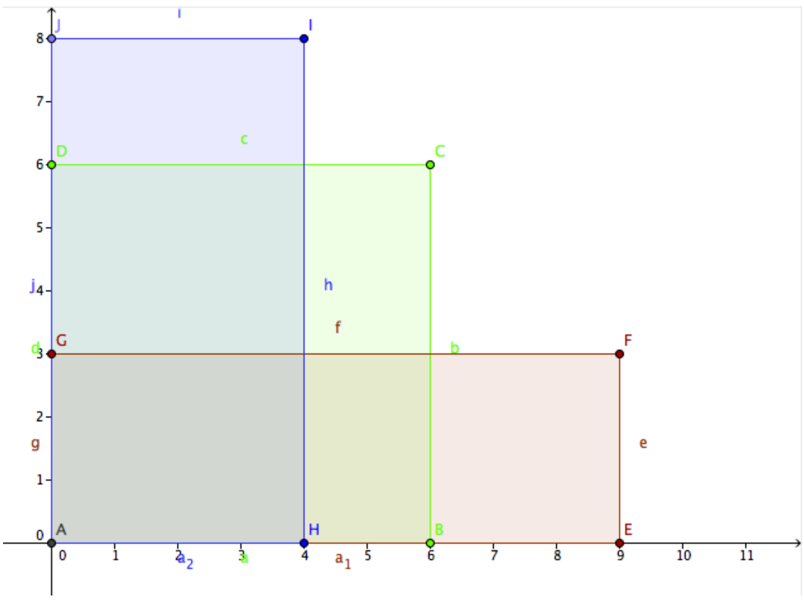
Würden diese nicht nachschlagbaren Zahlen ignoriert und würde man hinreichend viele der Zahlen nachschlagen, die in der Logarithmustabelle zu finden sind, würde die erste Seite ‚auf lange Sicht' mehr als sechsmal so stark beansprucht werden wie die letzte Seite. Durch den Ausdruck ‚auf lange Sicht' wird klar, dass die Stichprobe so groß sein muss, dass die Anfangsziffern den Benford-Wahrscheinlichkeiten entsprechend auftreten würden. Mit dieser Einschränkung würde ich der Aussage also zustimmen.

Beispiel 2: Begründung oder Beweis

Zeigen Sie: Unter allen umfangsgleichen Rechtecken hat das Quadrat den größten Inhalt.

Lösung:

Um mir die Fragestellung zu verdeutlichen, habe ich zunächst eine Skizze angefertigt, die drei verschiedene Rechtecke mit dem Umfang 24 zeigt.



Das Quadrat ABCD hat den Flächeninhalt 36, das Rechteck AEFG hat den Flächeninhalt 27 und das Rechteck AHIJ hat den Flächeninhalt 32. Es wird klar, dass das Quadrat den größten Flächeninhalt hat.

Diese Aussage lässt sich mit Hilfe der Mittelungleichung beweisen. Diese sagt aus, dass „...ein Produkt aus positiv-reellen Zahlen, dessen Faktoren konstante Summe haben, genau dann maximal ist, wenn die Faktoren gleich sind.“

Da der Umfang von Rechtecken mit konstanten Summen berechnet wird, ist klar, dass das Produkt aus positiv-reellen Zahlen, das bei der Berechnung des Flächeninhalts entsteht, genau dann maximal ist, wenn die Faktoren gleich sind, also alle Seiten gleich lang sind und das Rechteck damit ein Quadrat ist.

Im Online Writing Lab (OWL) finden Sie unsere gesammelten Schreibtechniken und -übungen, mit denen Sie Ihre Schreibkompetenzen ausbauen können. Wir haben zur besseren Übersicht alle Techniken in folgende Abschnitte geteilt:

- **Selbststeuerung** | Übungen und Selbsttests, um das eigene Schreiben zu reflektieren
- **Planen** | Techniken zu Zeit- und Selbstmanagement
- **Orientieren** | Ideen & Gedanken sortieren und strukturieren, Thema finden und eingrenzen, Fragestellungen konkretisieren
- **Material sammeln & bearbeiten** | Techniken, um sich in der Flut von Informationen und Literatur besser zurecht zu finden
- **Strukturieren** | Gedanken strukturieren, Thema finden und eingrenzen, Fragestellungen konkretisieren, Strukturieren von Texten
- **Ins Schreiben kommen / Rohfassung schreiben** | Schreibschwierigkeiten bekämpfen und mit dem Schreiben beginnen
- **Wissenschaftlicher Stil** | Formulierungshilfen und Übungen, mit denen der persönliche wissenschaftliche Schreibstil weiterentwickelt werden kann
- **Überarbeiten** | Methoden für verschiedene Überarbeitungsstufen und Korrekturen

LITERATUR

Beutelspacher, Albrecht (2009): „Das ist o. B. d. A trivial!“ Tipps und Tricks zur Formulierung mathematischer Gedanken, 9., aktual. Aufl. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Esselborn-Krumbiegel, Helga (2017): Richtig wissenschaftlich schreiben. 5., aktual. Aufl. Paderborn: Schöningh.

Kümmerer, Burkhard (2016): Wie man mathematisch schreibt. Sprache – Stil – Formeln. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Schindler, Kirsten (2011): Klausur, Protokoll, Essay: kleine Texte optimal verfassen. Paderborn: Schöningh.

Ziegler, Martin (2017): Mathematische Logik, 2. Aufl. Berlin: Springer Verlag.